# 数列型不等式的放缩方法与技巧

雅安市田家炳中学　　张有全

证明数列型不等式，因其思维跨度大、构造性强，需要有较高的放缩技巧而充满思考性和挑战性，能全面而综合地考查学生的潜能与后继学习能力，因而成为高考压轴题及各级各类竞赛试题命题的极好素材。这类问题的求解策略往往是：通过多角度观察所给数列通项的结构，深入剖析其特征，抓住其规律进行恰当地放缩。以下简要谈谈其方法和技巧：

## 一　利用重要不等式放缩

### 1．均值不等式法

**例 1** 设 $S_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$. 求证 $\dfrac{n(n+1)}{2}<S_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

**解析**　此数列的通项为 $a_k=\sqrt{k(k+1)},k=1,2,\cdots,n.$

$\because k<\sqrt{k(k+1)}<\dfrac{k+k+1}{2}=k+\dfrac{1}{2}$，$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}k<S_n<\sum\limits_{k=1}^{n}(k+\dfrac{1}{2})$，

即 $\dfrac{n(n+1)}{2}<S_n<\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n}{2}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

**注：**①应注意把握放缩的“度”：上述不等式右边放缩用的是均值不等式 $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$，若放成 $\sqrt{k(k+1)}<k+1$ 则得 $S_n<\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)=\dfrac{(n+1)(n+3)}{2}>\dfrac{(n+1)^2}{2}$，就放过“度”了！

②根据所证不等式的结构特征来选取所需要的重要不等式，这里

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

其中，$n=2,3$ 等的各式及其变式公式均可供选用。

**例 2**　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+a\cdot 2^{bx}}$，若 $f(1)=\dfrac{4}{5}$，且 $f(x)$ 在 **[0，1]** 上的最小值为 $\dfrac{1}{2}$，**求证：** $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)>n+\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2}$.（**02** 年全国联赛山东预赛题）

**简析** $f(x)=\dfrac{4^x}{1+4^x}=1-\dfrac{1}{1+4^x}>1-\dfrac{1}{2\bullet 2^x}(x\ne 0)\Rightarrow f(1)+\cdots+f(n)>(1-\dfrac{1}{2\times 2})$

$+(1-\dfrac{1}{2\times 2^2})+\cdots+(1-\dfrac{1}{2\times 2^n})=n-\dfrac{1}{4}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})=n+\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2}.$

**例 3 求证** $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}(n>1,n\in N)$.

**简析 不等式左边** $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$>n\cdot\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}}=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$，**故原结论成立.**

### 2．利用有用结论

**例 4 求证** $(1+1)(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{5})\cdots(1+\dfrac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}.$

**简析** 本题可以利用的有用结论主要有：

**法 1** 利用假分数的一个性质 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$ 可得

$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{6}{5}\cdots\dfrac{2n}{2n-1}>\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdots\dfrac{2n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\cdot(2n+1)$

$\Rightarrow(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{6}{5}\cdots\dfrac{2n}{2n-1})^2>2n+1$ 即 $(1+1)(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{5})\cdots(1+\dfrac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}.$

**法 2** 利用贝努利不等式 $(1+x)^n>1+nx(n\in N^*,n\ge 2,x>-1,x\ne 0)$ 的一个特例 $(1+\frac{1}{2k-1})^2>1+2\cdot\frac{1}{2k-1}$ (此处 $n=2,x=\frac{1}{2k-1}$)得

$$1+\frac{1}{2k-1}>\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}\Rightarrow\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{2k-1})=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}=\sqrt{2n+1}.$$

**注：例 4 是 1985 年上海高考试题，以此题为主干添“枝”加“叶”而编拟成 1998 年全国高考文科试题；进行升维处理并加参数而成理科姊妹题。如理科题的主干是：**

证明 $(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$.(可考虑用贝努利不等式 $n=3$ 的特例)

**例 5** 已知函数 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n},0<a\le 1,$ 给定 $n\in N^*,n\ge 2.$

**求证：** $f(2x)>2f(x)(x\ne 0)$ **对任意** $n\in N^*$ **且** $n\ge 2$ **恒成立。（90 年全国卷压轴题）**

**简析 本题可用数学归纳法证明，详参高考评分标准；这里给出运用柯西（$Cauchy$）不等式 $[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)]^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ 的简捷证法：**

$$f(2x)>2f(x)\Leftrightarrow\lg\frac{1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}}{n}>2\lg\frac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x}{n}$$

$$\Leftrightarrow[1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+a\cdot n^x]^2<n\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}]$$

而由 $Cauchy$ 不等式得 $(1\cdot 1+1\cdot 2^x+1\cdot 3^x+\cdots+1\cdot(n-1)^x+a\cdot n^x)^2$

$<(1^2+\cdots+1^2)\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a^2\cdot n^{2x}]$（$x=0$ 时取等号）

$\le n\bullet[1+2^{2x}+3^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+a\cdot n^{2x}]$（$\because 0<a\le 1$），得证！

**例 6** 已知 $a_1=1,a_{n+1}=(1+\frac{1}{n^2+n})a_n+\frac{1}{2^n}$. $(I)$ 用数学归纳法证明 $a_n\ge 2(n\ge 2)$；$(II)$ 对 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 都成立，证明 $a_n<e^2$（无理数 $e\approx 2.71828\cdots$）（05 年辽宁卷第 22 题）

**解析** $(II)$ 结合第 $(I)$ 问结论及所给题设条件 $\ln(1+x)<x$（$x>0$）的结构特征，可得放缩思路：

$$a_{n+1}\le(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n})a_n\Rightarrow\ln a_{n+1}\le\ln(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n})+\ln a_n\Rightarrow$$

$\le\ln a_n+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}$。于是 $\ln a_{n+1}-\ln a_n\le\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}$，

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\ln a_{i+1}-\ln a_i)\le\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{i^2+i}+\frac{1}{2^i})\Rightarrow\ln a_n-\ln a_1\le 1-\frac{1}{n}+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}<2.$$ 即

$\ln a_n-\ln a_1<2\Rightarrow a_n<e^2.$

**注：**题目所给条件 $\ln(1+x)<x$（$x>0$）为一有用结论，可以起到提醒思路与探索放缩方向的作用；当然，本题还可用结论 $2^n>n(n-1)(n\ge 2)$ 来放缩：

$$a_{n+1}\le(1+\frac{1}{n(n-1)})a_n+\frac{1}{n(n-1)}\Rightarrow a_{n+1}+1\le(1+\frac{1}{n(n-1)})(a_n+1)\Rightarrow$$

$$\ln(a_{n+1}+1)-\ln(a_n+1)\le\ln(1+\frac{1}{n(n-1)})<\frac{1}{n(n-1)}.$$

$$\Rightarrow\sum_{i=2}^{n-1}[\ln(a_{i+1}+1)-\ln(a_i+1)]<\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i(i-1)}\Rightarrow\ln(a_n+1)-\ln(a_2+1)<1-\frac{1}{n}<1,$$

即 $\ln(a_n+1)<1+\ln 3\Rightarrow a_n<3e-1<e^2.$

**例 7** 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n],n\in N^*,n>2.[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数。设

正数数列$\{a_n\}$满足：$a_1=b(b>0),a_n\le\dfrac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}},n\ge2.$

求证$a_n<\dfrac{2b}{2+b[\log_2 n]},n\ge3.$（05年湖北卷第（22）题）

**简析** 当$n\ge2$时$a_n\le\dfrac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}\ge\dfrac{n+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{n}$，即$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}\ge\dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=2}^{n}(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k-1}})\ge\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}.$于是当$n\ge3$时有$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_1}>\dfrac{1}{2}[\log_2 n]\Rightarrow a_n<\dfrac{2b}{2+b[\log_2 n]}.$

**注**：①本题涉及的和式$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$为调和级数，是发散的，不能求和；但是可以利用所给题设结论$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}[\log_2 n]$来进行有效地放缩；

②引入有用结论在解题中即时应用，是近年来高考创新型试题的一个显著特点，有利于培养学生的学习能力与创新意识。

**例8** 设$a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$，求证：数列$\{a_n\}$单调递增且$a_n<4.$

**解析** 引入一个结论：若$b>a>0$则$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a)$（证略）

整理上式得$a^{n+1}>b^n[(n+1)a-nb].$（⊗），以$a=1+\dfrac{1}{n+1},b=1+\dfrac{1}{n}$代入（⊗）式得$(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\dfrac{1}{n})^n.$即$\{a_n\}$单调递增。

以$a=1,b=1+\dfrac{1}{2n}$代入（⊗）式得$1>(1+\dfrac{1}{2n})^n\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow(1+\dfrac{1}{2n})^{2n}<4.$

此式对一切正整数$n$都成立，即对一切偶数有$(1+\dfrac{1}{n})^n<4$，又因为数列$\{a_n\}$单调递增，所以对一切正整数$n$有$(1+\dfrac{1}{n})^n<4$。

**注：①上述不等式可加强为**$2\le(1+\dfrac{1}{n})^n<3.$**简证如下：**

**利用二项展开式进行部分放缩：**$a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\dfrac{1}{n}+C_n^2\cdot\dfrac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\dfrac{1}{n^n}.$

**只取前两项有**$a_n\ge1+C_n^1\cdot\dfrac{1}{n}=2.$**对通项作如下放缩：**

$$C_n^k\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}<\frac{1}{k!}\le\frac{1}{1\cdot2\cdots2}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

故有$a_n<1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2}<3.$

②上述数列$\{a_n\}$的极限存在，为无理数$e$；同时是下述试题的背景：已知$i,m,n$是正整数，且$1<i\le m<n.$（1）证明$n^iA_m^i<m^iA_n^i$；（2）证明$(1+m)^n>(1+n)^m.$（01年全国卷理科第20题）

简析 对第（2）问：用$1/n$代替$n$得数列$\{b_n\}:b_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}$是递减数列；借鉴此结论可有如下简捷证法：数列$\{(1+n)^{\frac{1}{n}}\}$递减，且$1<i\le m<n,$故$(1+m)^{\frac{1}{m}}>(1+n)^{\frac{1}{n}},$即$(1+m)^n>(1+n)^m$。当然，本题每小题的证明方法都有10多种，如使用上述例4所提供的假分数性质、贝努力不等式、甚至构造“分房问题”概率模型、构造函数等都可以给出非常漂亮的解决！详见文[1]。

## 二 部分放缩

**例 9** 设$a_n=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{n^a},a\ge 2.$**求证：** $a_n<2.$

**解析** $a_n=1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$ **又**$k^2=k\cdot k>k(k-1),k\ge 2$**（只将其中一个**$k$**变成**$k-1$**，进行部分放缩）**，$\therefore \frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，

**于是**$a_n\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2.$

**例 10** 设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n^2-na_n+1(n\in N_+)$，当$a_1\ge 3$时证明对所有$n\ge 1,$ 有$(i)a_n\ge n+2$；$(ii)\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\le\frac{1}{2}$（02 年全国高考题）

**解析** $(i)$用数学归纳法：当$n=1$时显然成立，假设当$n\ge k$时成立即$a_k\ge k+2$，则当$n=k+1$时$a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\ge a_k(k+2-k)+1\ge(k+2)\cdot 2+1>k+3$，成立。

$(ii)$ 利用上述部分放缩的结论 $a_{k+1}\ge 2a_k+1$ 来放缩通项，可得 $a_{k+1}+1\ge 2(a_k+1)\Rightarrow a_k+1\ge\cdots\ge 2^{k-1}(a_1+1)\ge 2^{k-1}\cdot 4=2^{k+1}\Rightarrow\frac{1}{a_k+1}\le\frac{1}{2^{k+1}}.$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}.$$

**注：**上述证明$(i)$用到部分放缩，当然根据不等式的性质也可以整体放缩：$a_{k+1}\ge(k+2)(k+2-k)+1>k+3$；证明$(ii)$就直接使用了部分放缩的结论$a_{k+1}\ge 2a_k+1$。

## 三 添减项放缩

**上述例 4 之法 2 就是利用二项展开式进行减项放缩的例子。**

**例 11** 设$n>1,n\in N$，**求证**$(\frac{2}{3})^n<\frac{8}{(n+1)(n+2)}.$

**简析** **观察**$(\frac{2}{3})^n$**的结构，注意到**$(\frac{3}{2})^n=(1+\frac{1}{2})^n$，**展开得**

$$(1+\frac{1}{2})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{2}+C_n^2\cdot\frac{1}{2^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\ge 1+\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=\frac{(n+1)(n+2)+6}{8},$$

**即**$(1+\frac{1}{2})^n>\frac{(n+1)(n+2)}{8}$，**得证.**

**例 12** 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n=1,2,\cdots).$ （Ⅰ）证明$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数$n$成立；（Ⅱ）令$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$，判定$b_n$与$b_{n+1}$的大小，并说明理由（04 年重庆卷理科第（22）题）

**简析** 本题有多种放缩证明方法，这里我们对（Ⅰ）进行减项放缩，有

**法 1** 用数学归纳法（只考虑第二步）$a^2{}_{k+1}=a_k^2+2+\frac{1}{a_k^2}>2k+1+2=2(k+1)+1$；

**法 2** $a^2{}_{n+1}=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}>a_n^2+2\Rightarrow a_{k+1}^2-a_k^2>2,k=1,2,\cdots,n-1.$

则$a_n^2-a_1^2>2(n-1)\Rightarrow a_n^2>2n+2>2n+1\Rightarrow a_n>\sqrt{2n+1}$